PRÓBA PRZED MATURĄ 2014

POZIOM ROZSZERZONY

CZAS PRACY: 180 MIN.

ZADANIE 1 (4 PKT)

Nie używając kalkulatora porównaj liczby: $a = 3^{\log_{3\sqrt{3}} 12}$ i $b = \sqrt[4]{10^{2+\frac{1}{2}\log 81}}$.

ZADANIE 2 (4 PKT)

Sporządź wykres funkcji f określonej wzorem $f(x) = ||2x-1|-2|-1$. Podaj miejsca zerowe tej funkcji oraz jej zbiór wartości.

ZADANIE 3 (5 PKT)

Kąty w trójkącie mają miary: α, $\beta = 2\alpha$, $\gamma = 4\alpha$. Wykaż, że długości boków a, b, c tego trójkąta spełniają równość: $\frac{1}{a} - \frac{1}{b} - \frac{1}{c} = 0$.

ZADANIE 4 (6 PKT)

Dana jest funkcja $f(x) = (m-5)x^4 + 4x^2 + m + 7$, gdzie $x \in \mathbb{R}$. Wyznacz wszystkie wartości parametru $m \in \mathbb{R}$, dla których funkcja ma 4 różne miejsca zerowe.

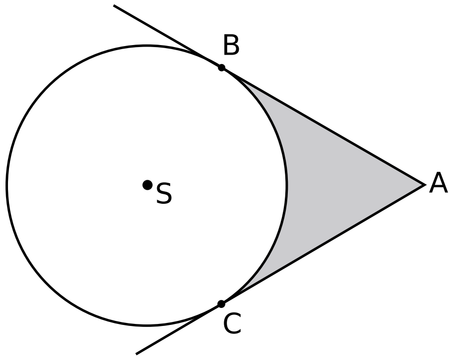
ZADANIE 5 (7 PKT)

Z punktu $A = (6,3)$ poprowadzono styczne do okręgu $x^2 + y^2 - 6y = 0$.

a) Wyznacz równania tych stycznych.

b) Oblicz odległość punktów styczności.

c) Oblicz pole figury zaznaczonej na rysunku.



ZADANIE 6 (4 PKT)

Wyznacz liczbę x, tak aby liczby dodatnie: $\frac{1}{3}\log_2(2x+5)$, $3\log_8(2x+5)$, $\log_{\sqrt{3}}3+\log_3^2 9$ tworzyły ciąg geometryczny.

ZADANIE 7 (5 PKT)

W trójkącie ABC na boku BC zaznaczono punkt D, na boku AC zaznaczono punkt E, na boku AB punkt F. Poprowadzono okręgi $o_A,\ o_B,\ o_C$, w ten sposób, że do okręgu o_A należą punkty $A,\ E,\ F$, do o_B – punkty $B,\ D,\ F$, a do o_C – punkty $C,\ D,\ E$. Wykaż, że te trzy okręgi przecinają się w jednym punkcie.

ZADANIE 8 (5 PKT)

Basen można napełnić, otwierając zawór nr 1, a opróżnić, odkręcając zawór nr 2. Jeśli otworzony jest tylko jeden zawór, całkowite napełnienie basenu trwa o godzinę krócej niż jego opróżnienie. Gdy równocześnie odkręcono obydwa zawory, basen napełnił się w ciągu 12 godzin. W ciągu ilu godzin napełni się basen, jeżeli zawór nr 2 będzie zamknięty?

ZADANIE 9 (6 PKT)

Dwie kule mające średnice 4 cm i 1 cm wpisano w stożek w ten sposób, że większa jest styczna do podstawy i powierzchni bocznej stożka, zaś mniejsza – do powierzchni bocznej stożka i do większej kuli. Oblicz pole powierzchni tego stożka.

ZADANIE 10 (4 PKT)

a) Na ile sposobów można ze standardowej talii 52 kart wybrać 13 kart tak, aby mieć co najwyżej jednego czerwonego (kier lub karo) asa?

b) Jakie jest prawdopodobieństwo takiego zdarzenia?

Rozwiązania zadań znajdziesz na stronie
https://www.zadania.info/1665_9024R