

# PRÓBA PRZED MATURĄ 2011

POZIOM ROZSZERZONY

CZAS PRACY: 180 MIN.

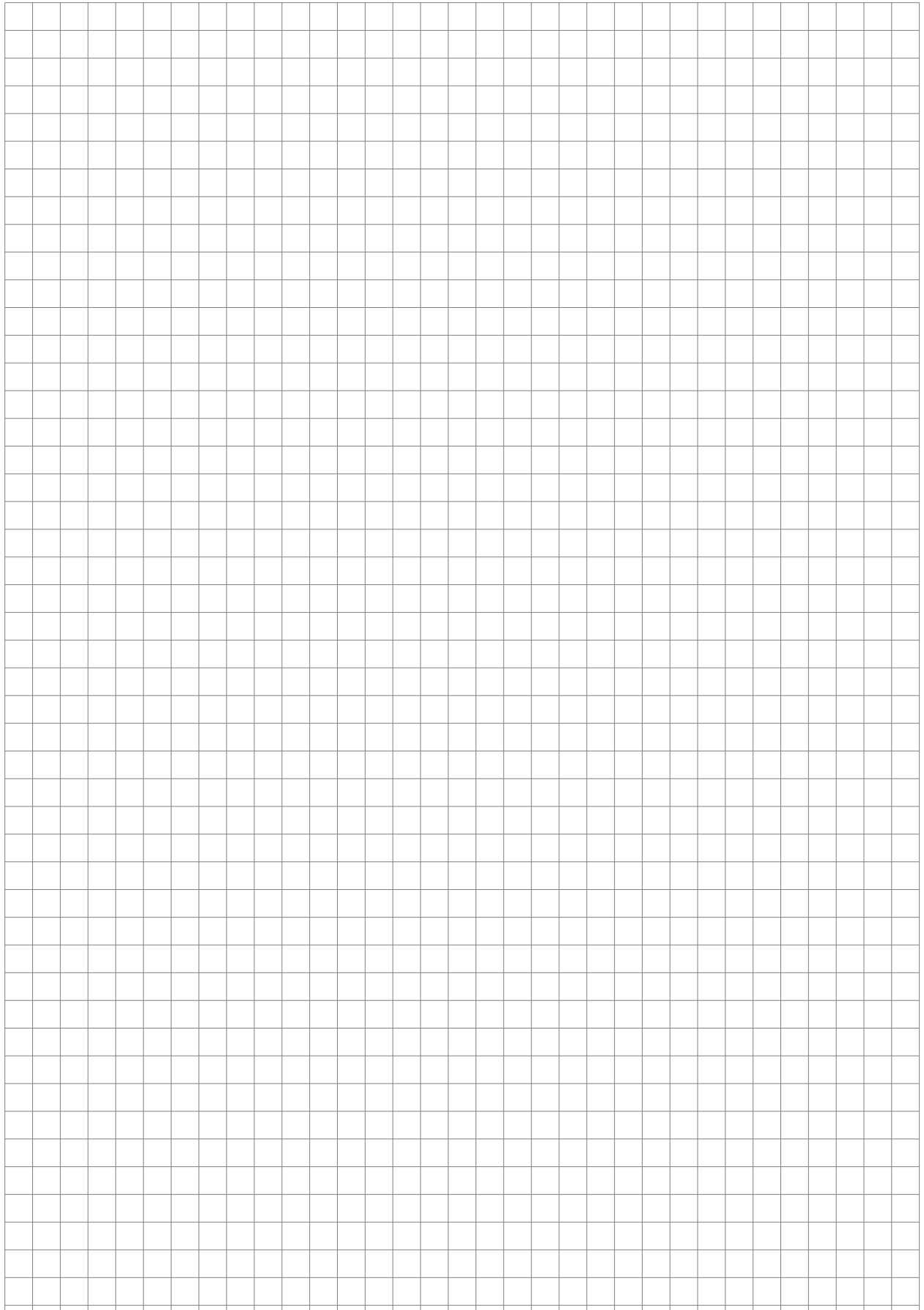
ZADANIE 1 (4 PKT)

Liczby  $\frac{1}{2} + \log_4 x^3$ ,  $\log_4 4x$ ,  $\log_4 \sqrt{x}$  w podanej kolejności, dla pewnej rzeczywistej wartości  $x$ , są trzema kolejnymi początkowymi wyrazami nieskończonego ciągu arytmetycznego. Wyznacz  $x$  oraz sumę czterdziestu początkowych wyrazów tego ciągu.



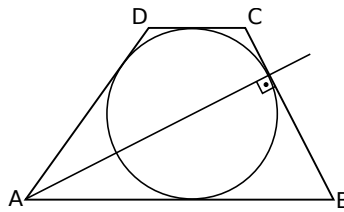
ZADANIE 2 (5 PKT)

Wyznacz wszystkie wartości parametru  $m \in \mathbb{R}$ , dla których równanie  $||x - 4| - x| = m$  ma tylko jedno rozwiązanie.



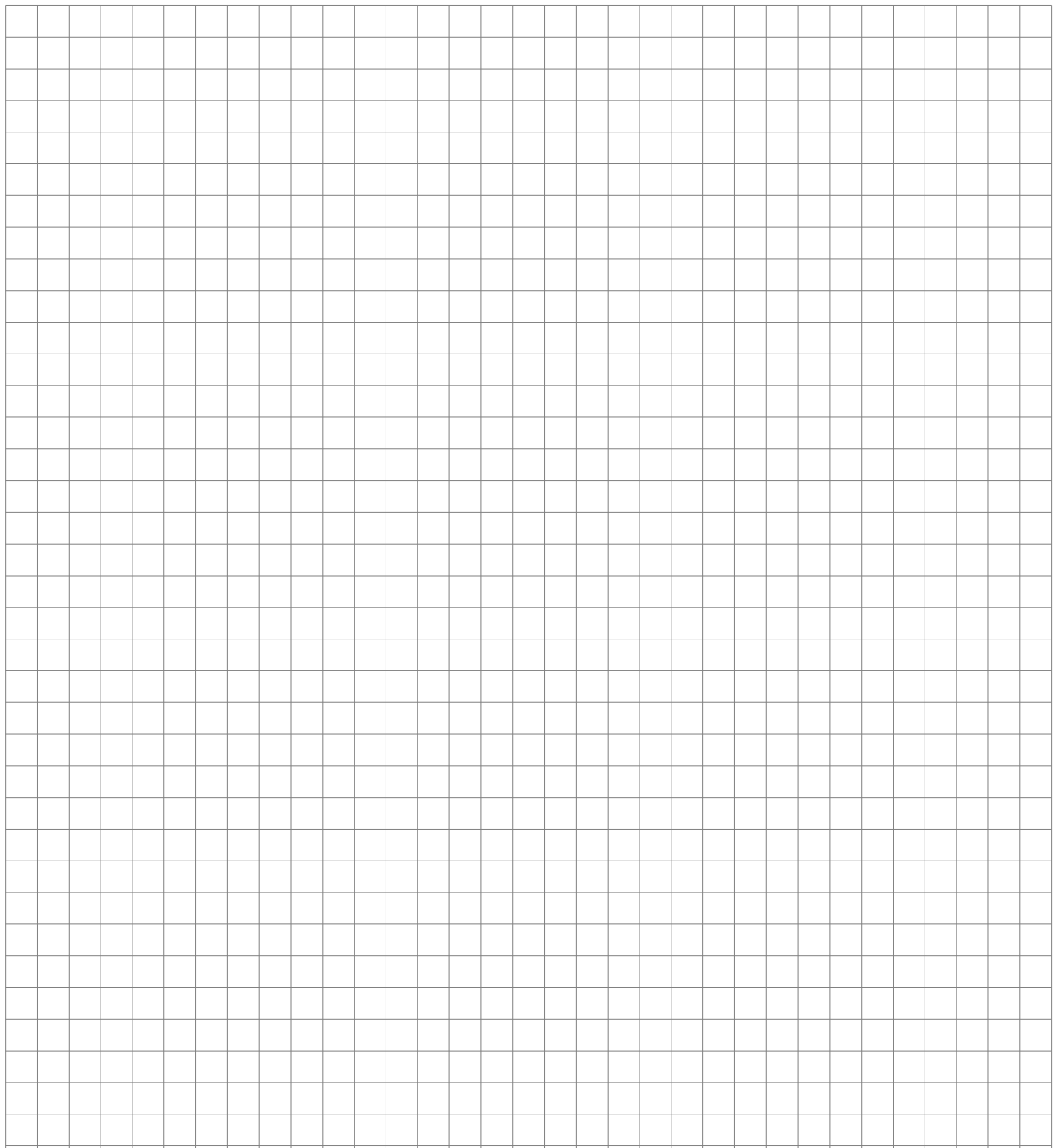
ZADANIE 3 (5 PKT)

W trapez  $ABCD$ , gdzie  $AB \parallel CD$  i  $|AB| > |CD|$ , wpisano okrąg (patrz rysunek).



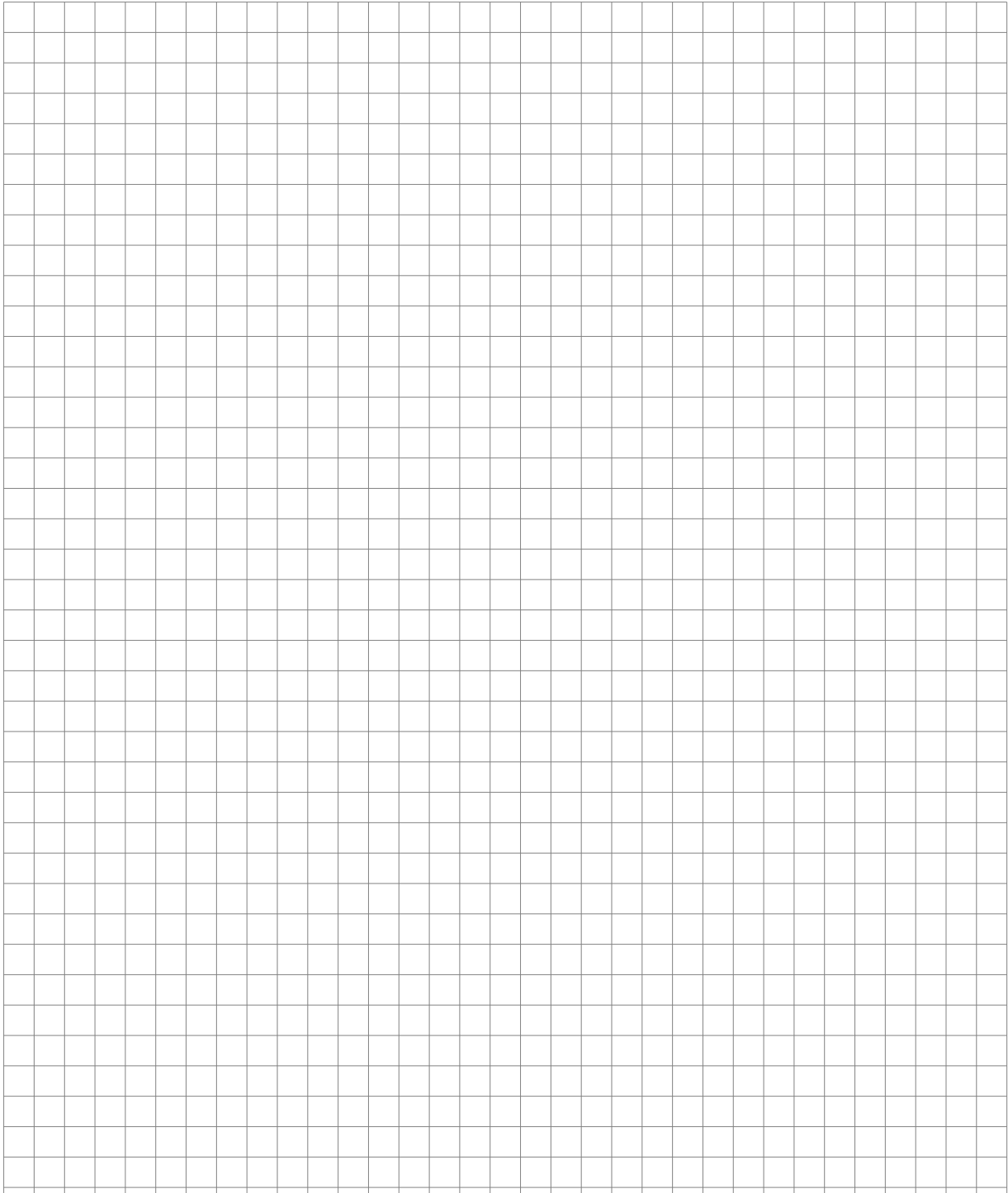
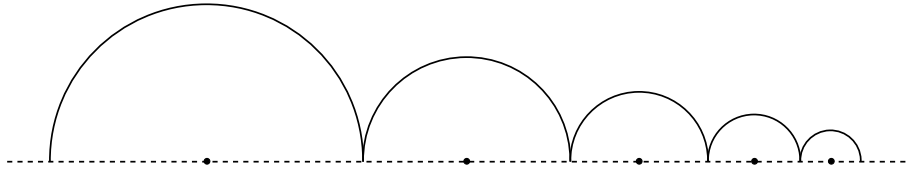
Dwusieczna kąta ostrego przy wierzchołku  $A$  jest prostopadła do ramienia  $|BC|$ .

- Wykaż, że dwusieczna kąta przy wierzchołku  $D$  jest równoległa do ramienia  $BC$ .
- Oblicz  $|BC| : |DC|$ .



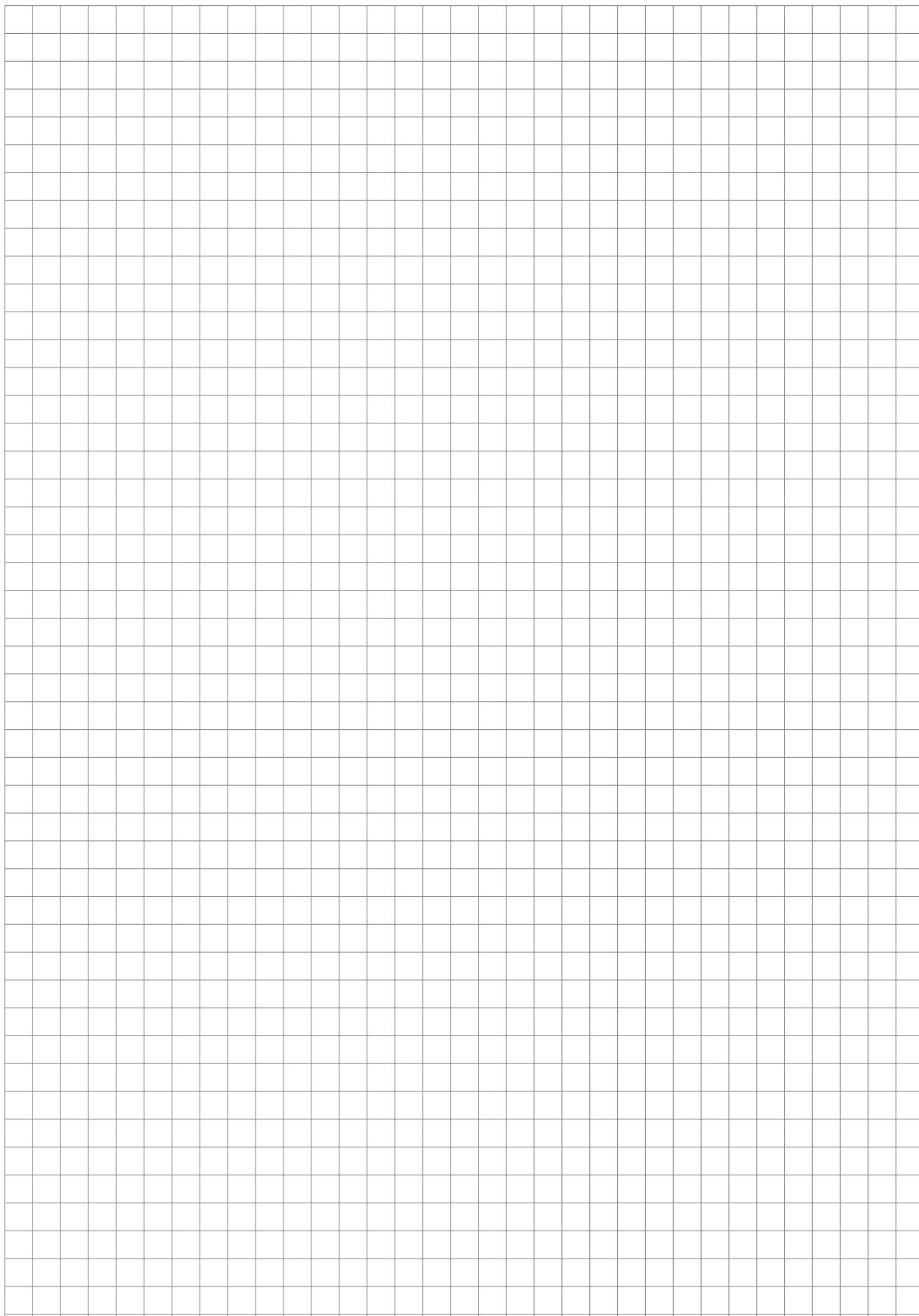
ZADANIE 4 (4 PKT)

Z półokręgów budujemy krzywą (patrz rysunek). Pierwszy półokrąg ma promień długości  $r, r > 0$ , a promień każdego następnego półokręgu stanowi  $\frac{2}{3}$  promienia poprzedniego. Niech  $n$  oznacza liczbę półokręgów tworzących tę krzywą. Udowodnij, że dla dowolnej liczby naturalnej dodatniej  $n$  długość krzywej jest mniejsza od  $3\pi r$ .



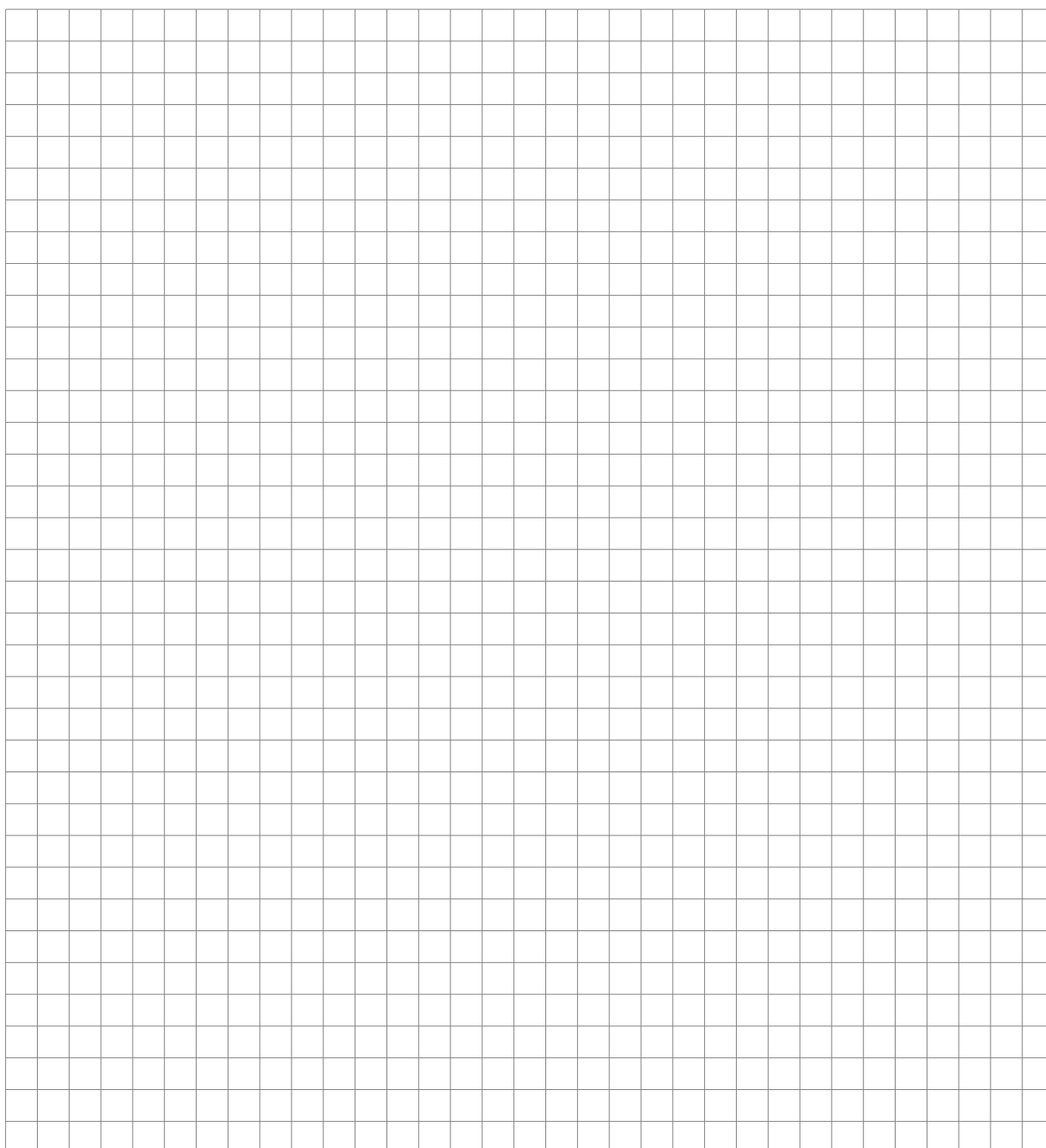
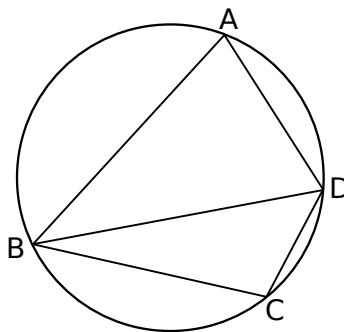
ZADANIE 5 (6 PKT)

Punkty przecięcia paraboli  $y = x^2 - 2x - 8$  z prostą  $k : 2x + y - 1 = 0$  są końcami przekątnej rombu, którego pole jest równe 30. Oblicz współrzędne wierzchołków tego rombu.



ZADANIE 6 (5 PKT)

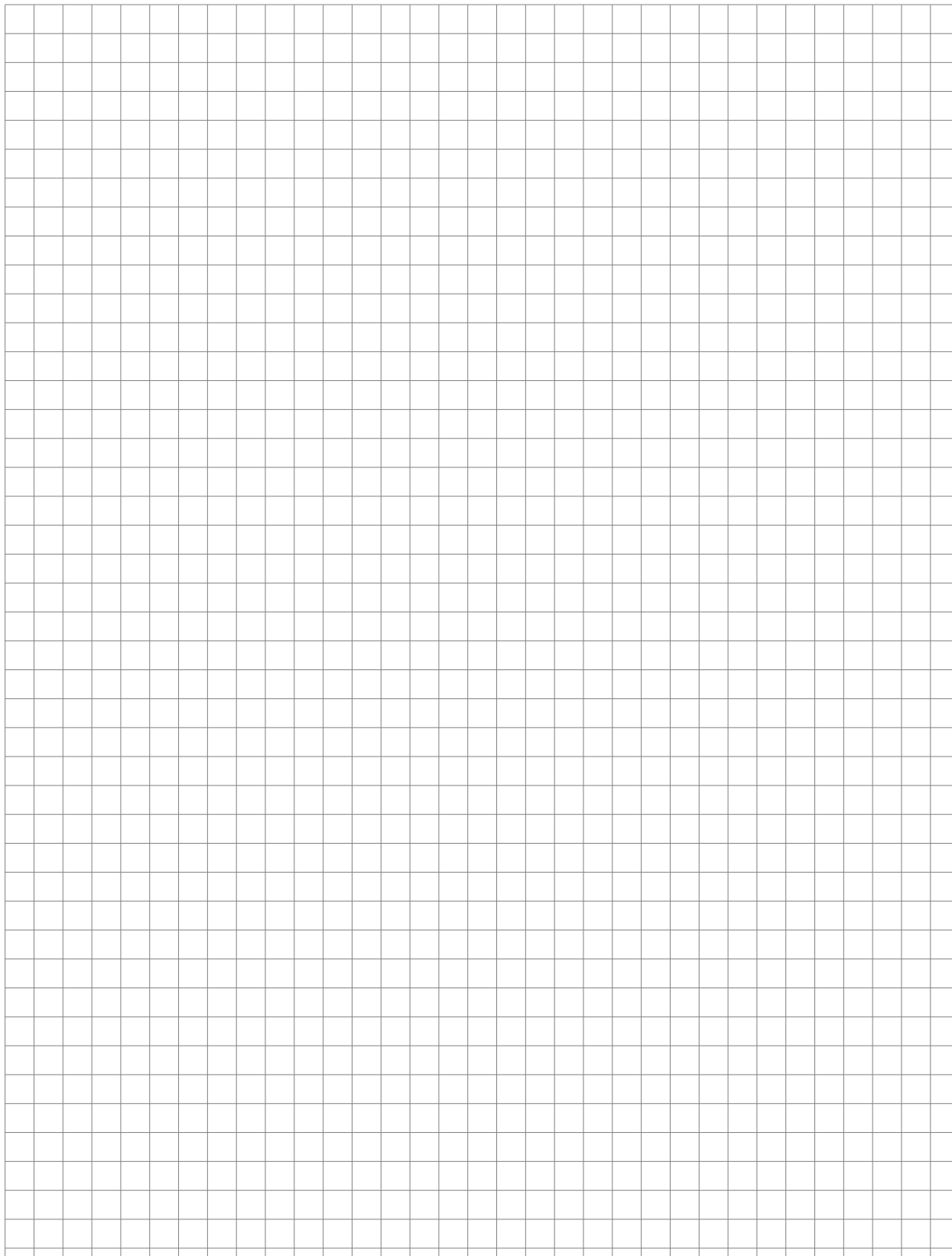
Czworokąt  $ABCD$  jest wpisany w okrąg o promieniu  $4\sqrt{3}$  (patrz rysunek). Przekątna  $BD$  czworokąta ma długość 12. Iloczyn sinusów wszystkich kątów wewnętrznych czworokąta jest równy  $\frac{3}{16}$ . Wiedząc, że  $|\angle A| < |\angle C| < |\angle D|$ , oblicz miary kątów czworokąta  $ABCD$ .



ZADANIE 7 (5 PKT)

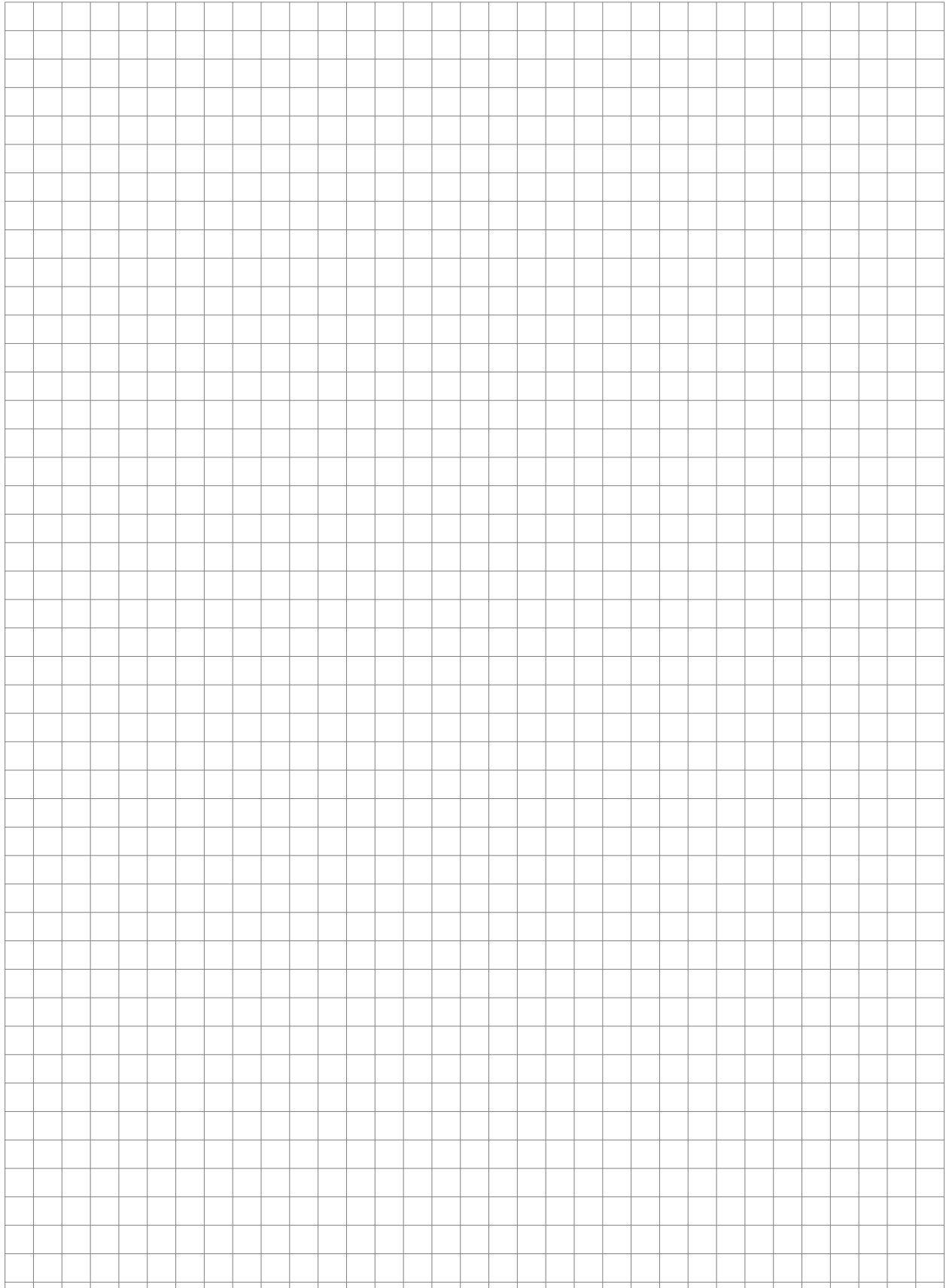
W wyniku podzielenia wielomianu  $W(x)$  przez  $(x + 2)$  otrzymujemy iloraz  $Q(x)$  i resztę 0. Jeśli natomiast podzielimy wielomian  $W(x)$  przez  $(x + 1)$ , to otrzymamy iloraz  $Q(x) + 2x - 3$  i resztę 2.

- a) Wyznacz wielomian  $W(x)$ .
- b) Rozwiąż nierówność  $W(x) \leq -(x + 1)(x + 2)$ .



ZADANIE 8 (5 PKT)

Ze zbioru  $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$  losujemy kolejno, bez zwracania trzy cyfry i tworzymy liczbę trzycyfrową: pierwsza wylosowana cyfra jest cyfrą setek, druga – cyfrą dziesiątek, a trzecia – cyfrą jedności. Oblicz prawdopodobieństwo zdarzenia, że otrzymana liczba ma następującą własność: różnica między największą i najmniejszą cyfrą tej liczby jest nie większa niż 3.

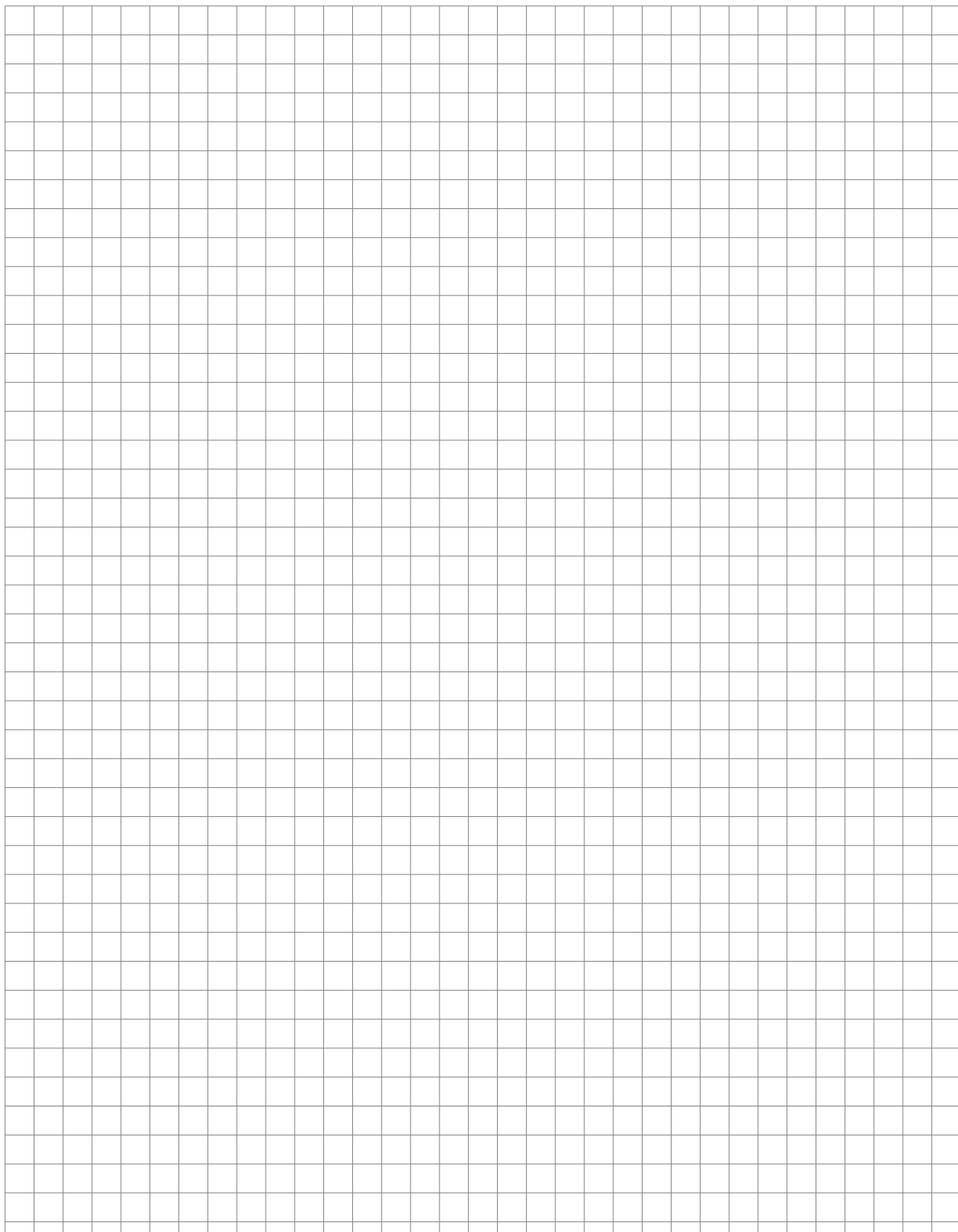




## ZADANIE 9 (6 PKT)

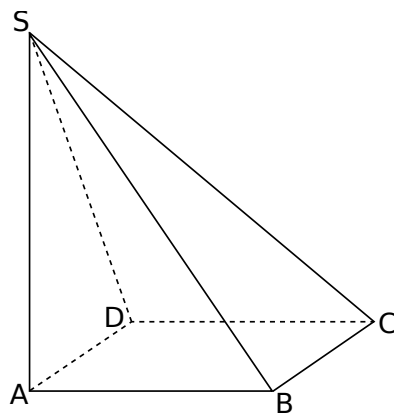
Dane jest równanie kwadratowe  $(m - 1)x^2 + 2x + 3 - m = 0$  z niewiadomą  $x$  i parametrem  $m$ .

- Znajdź wzór i dziedzinę funkcji  $f$ , która zmiennej rzeczywistej  $m$  przyporządkowuje iloczyn dwóch różnych pierwiastków danego równania. Naszkicuj wykres funkcji  $f$  w prostokątnym układzie współrzędnych.
- Wykaż, że do wykresu funkcji  $f$  należą tylko trzy punkty o obu współrzędnych całkowitych.



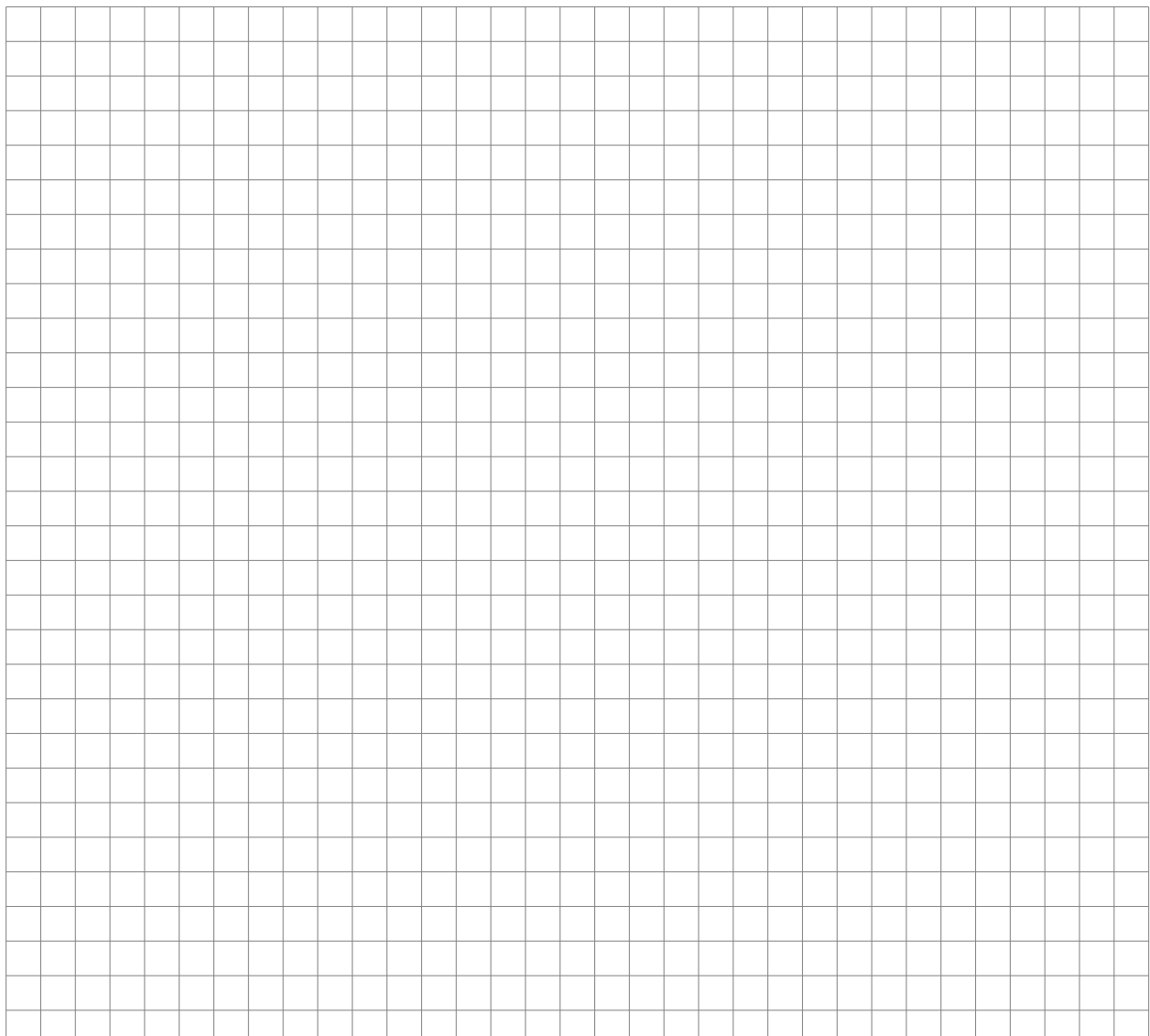
ZADANIE 10 (5 PKT)

Podstawą ostrosłupa  $ABCDS$  jest kwadrat  $ABCD$  (patrz rysunek).



Krawędź  $AS$  jest wysokością tego ostrosłupa. Odległość punktu  $B$  od krawędzi  $CS$  jest równa  $d$ , a kąt dwuścienny między ścianami  $BCS$  i  $CDS$  ma miarę  $2\alpha$ , gdzie  $\alpha \in (\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2})$ . Oblicz:

- odległość punktu  $A$  od krawędzi  $CS$
- wysokość tego ostrosłupa.



Rozwiązania zadań znajdziesz na stronie  
[HTTP://WWW.ZADANIA.INFO/5012\\_3478R](http://www.zadania.info/5012_3478R)