PRÓBA PRZED MATURĄ 2012

POZIOM ROZSZERZONY

CZAS PRACY: 180 MIN.

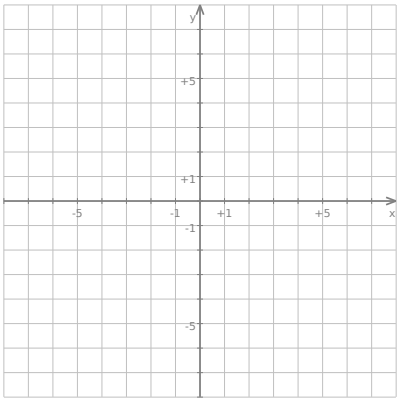
ZADANIE 1 (6 PKT)

Dana jest funkcja $f(x) = \frac{2+x}{4-x}$, gdzie $x \in \mathbb{R} \setminus \{4\}$.

a) Wyznacz wszystkie punkty należące do wykresu funkcji f, których obie współrzędne są liczbami pierwszymi.

b) Podaj zbiór tych argumentów, dla których funkcja f przyjmuje wartości nieujemne.

c) Naszkicuj wykres funkcji g, jeśli $g(x) = \frac{|f(x)|}{f(x)}$.



ZADANIE 2 (4 PKT)

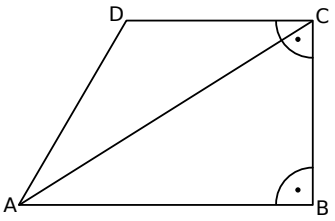
Ciąg (a_n), gdzie $n \in \mathbb{N}_+$, określony jest następująco:

$$\begin{cases} a_1 = 2 \\ a_{n+1} = \frac{a_n}{3} \quad \text{dla } n \geqslant 1. \end{cases}$$

Wyznacz wszystkie wartości k, dla których suma k początkowych wyrazów ciągu (a_n) jest większa od $\frac{728}{243}$.

ZADANIE 3 (4 PKT)

W trapezie prostokątnym $ABCD$ na rysunku poniżej dane są: $|AD| = 8$ cm, $|DC| = 7$ cm oraz $|AC| = 13$ cm.



Oblicz:

a) miarę kąta ostrego trapezu przy wierzchołku A,

b) długość odcinka łączącego środki ramion tego trapezu.

ZADANIE 4 (4 PKT)

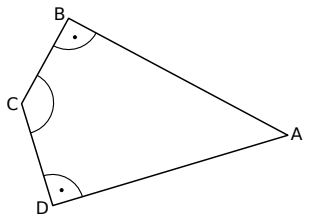
Wykaż, że jeżeli $x > 1,\ y > 1$ i $z > 1$, to $\log_x z + \log_y z \geqslant 4 \cdot \log_{xy} z$.

ZADANIE 5 (5 PKT)

Wyznacz wszystkie wartości x, dla których ciąg $(|x-1|, 2, |x+3|)$ jest malejącym ciągiem arytmetycznym.

ZADANIE 6 (4 PKT)

W czworokącie wypukłym $ABCD$ (zobacz rysunek poniżej) dane są kąty: $|\sphericalangle ADC| = |\sphericalangle ABC| = 90^\circ$ oraz $|\sphericalangle DCB| = 135^\circ$. Wykaż, że $\frac{|DB|}{|AC|} = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

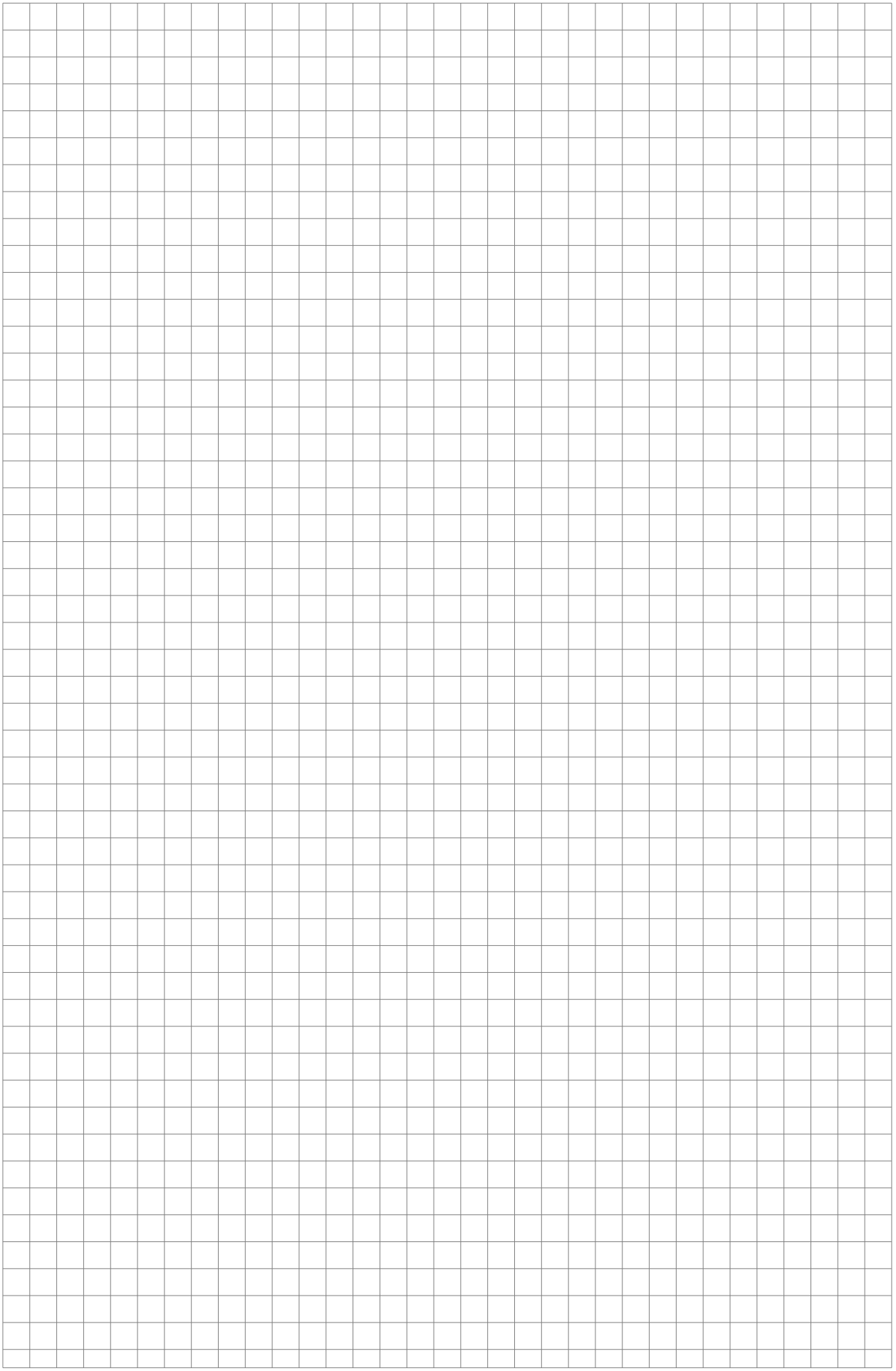


ZADANIE 7 (5 PKT)

Jednym z pierwiastków wielomianu $W(x)$ stopnia trzeciego jest liczba 1, a suma pozostałych dwóch pierwiastków jest równa 0. Do wykresu tego wielomianu należy punkt $A(3,1)$. Wiedząc, że reszta z dzielenia wielomianu $W(x)$ przez dwumian $(x-2)$ jest równa -2, wyznacz wzór tego wielomianu.

ZADANIE 8 (4 PKT)

Wyznacz wszystkie wartości parametru $p \in \mathbb{R}$, dla których równanie $3\cos^2 x = (p+1)\cos x$ ma w przedziale $\left(-\frac{3\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ tylko trzy różne rozwiązania, z których dwa są ujemne, a jedno dodatnie.

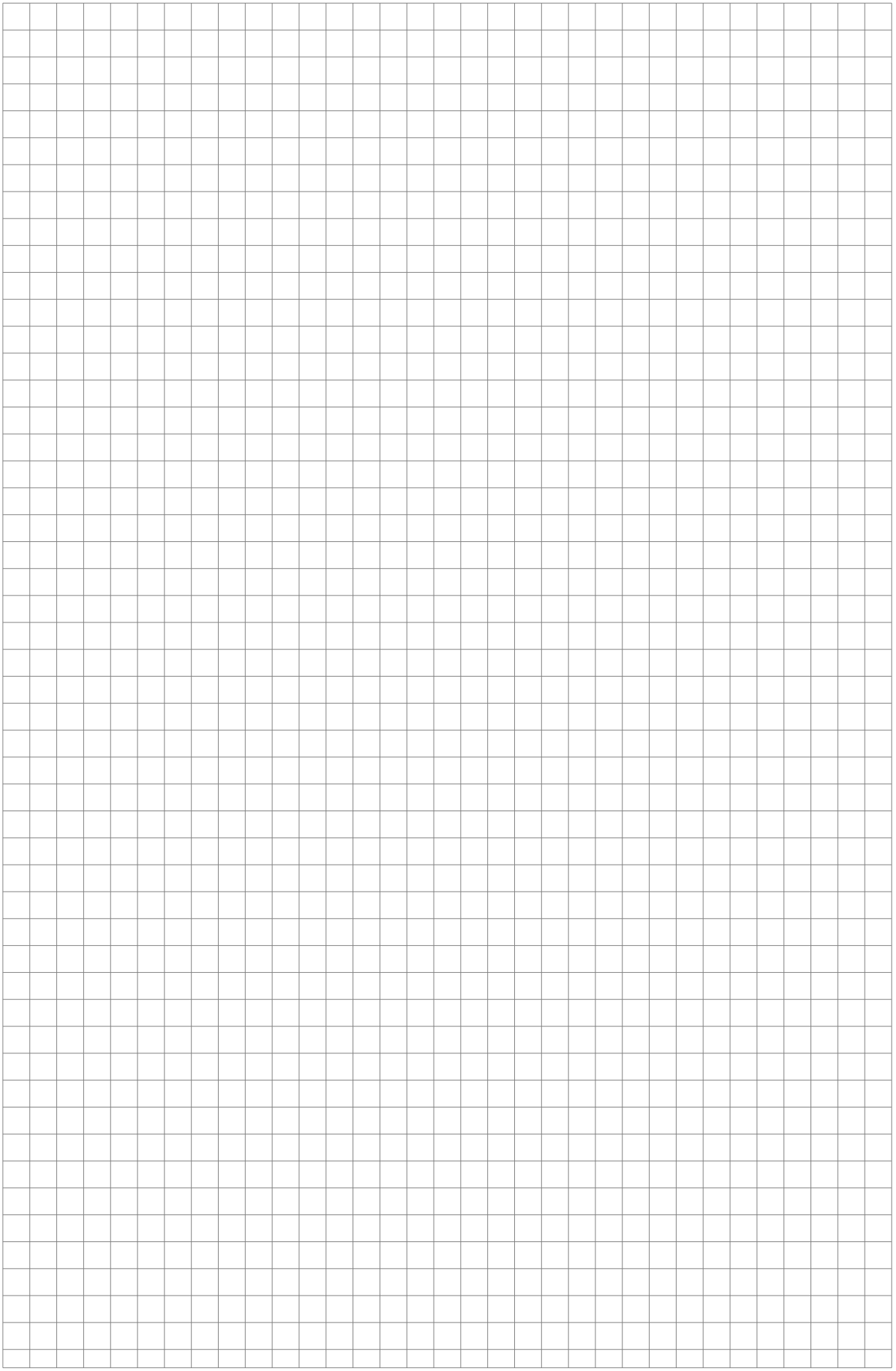


ZADANIE 9 (4 PKT)

Ze zbioru liczb $\{0, 1, -1, 3, -3, 5, -5, \ldots, 2n+1, -2n-1\}$, gdzie n jest ustaloną liczbą naturalną, większą od 4, losujemy jednocześnie trzy liczby. Niech A oznacza zdarzenie: suma wylosowanych liczb nie ulegnie zmianie, jeżeli w wylosowanych liczbach zmienimy znaki na przeciwne. Wiedząc, że $P(A) = \frac{1}{133}$, oblicz n.

ZADANIE 10 (6 PKT)

W trójkącie ABC, w którym $A = (-2, -2)$ oraz $B = (4, 4)$, kąt przy wierzchołku B jest rozwarty. Bok AC zawiera się w prostej $k : x - 3y - 4 = 0$. Środek okręgu opisanego na trójkącie ABC znajduje się w odległości $\sqrt{10}$ od boku AC. Wyznacz równanie tego okręgu.



ZADANIE 11 (4 PKT)

Podstawą ostrosłupa jest romb, którego pole wynosi $800\,\text{cm}^2$, a kąt ostry rombu ma miarę 30°. Wysokość ostrosłupa jest równa 24 cm, a spodek tej wysokości jest środkiem okręgu wpisanego w podstawę. Oblicz:

a) promień tego okręgu,

b) pole powierzchni bocznej ostrosłupa.

Rozwiązania zadań znajdziesz na stronie
HTTP://WWW.ZADANIA.INFO/9489_9499R