LICZBY

LICZBY NATURALNE

12 LISTOPADA 2011

CZAS PRACY: 180 MIN.

ZADANIE 1 (5 PKT)
Udowodnij, że suma sześcianów trzech kolejnych liczb naturalnych jest podzielna przez 9.

ZADANIE 2 (5 PKT)
Pokazać, że dla każdej liczby całkowitej n liczba $n^5 - n$ jest podzielna przez 5.

ZADANIE 3 (5 PKT)
Wykaż, że iloczyn trzech kolejnych liczb podzielnych przez 3 dzieli się przez 81.

ZADANIE 4 (5 PKT)
Uzasadnij, że dla dowolnych liczb naturalnych $b > a$ zachodzi równość $\mathrm{NWD}(a,b) = \mathrm{NWD}(a,b-a)$.

ZADANIE 5 (5 PKT)
Wykaż, że jeżeli liczby całkowite x, y, z spełniają równanie $x^2 + y^2 + z^2 = 2010$ to co najwyżej jedna z liczb x, y, z dzieli się przez 4.

ZADANIE 6 (5 PKT)
Wykaż, że różnica kwadratów dwóch kolejnych liczb parzystych jest liczbą podzielną przez 4.

ZADANIE 7 (5 PKT)
Wykaż, że różnica kwadratów dwóch kolejnych liczb nieparzystych jest liczbą podzielną przez 8.

ZADANIE 8 (5 PKT)
Wykaż, że liczba $3 + 3^2 + 3^3 + 3^4 + \ldots + 3^{100}$ jest podzielna przez 6.

ZADANIE 9 (5 PKT)
Wykaż, że suma kwadratów dwóch kolejnych liczb nieparzystych nie dzieli się przez 4.

ZADANIE 10 (5 PKT)
Pokazać, że dla każdej liczby naturalnej n liczba $8^n + 6$ jest podzielna przez 7.

ZADANIE 11 (5 PKT)
Wykaż, że każda liczba pierwsza większa od 3 jest postaci $6n-1$ lub $6n+1$ dla pewnej liczby naturalnej n.

ZADANIE 12 (5 PKT)
Wykaż, że jeśli a należy do zbioru liczb całkowitych, to a^3-a jest podzielne przez 3.

ZADANIE 13 (5 PKT)
Wykaż, że liczba $3^{18}-2^{18}$ jest podzielna przez 19.

ZADANIE 14 (5 PKT)
Wyznacz wszystkie liczby całkowite n, dla których liczba $\frac{3n-1}{n+3}$ jest liczbą całkowitą.

ZADANIE 15 (5 PKT)
Liczby naturalne dodatnie a, b, c spełniają równanie $a^2+b^2=c^2$. Uzasadnij, że liczba abc jest

a) parzysta;

b) podzielna przez 3.

ZADANIE 16 (5 PKT)
Wykaż, że suma pięciu kolejnych liczb naturalnych nie może być liczbą pierwszą.

ZADANIE 17 (5 PKT)
Uzasadnij, że liczba 55 jest dzielnikiem liczby 31!, i że liczba 37 nie jest dzielnikiem liczby 31!.

ZADANIE 18 (5 PKT)
Wykaż, że liczba $a=3^{27}+3^{29}$ jest podzielna przez 30.

ZADANIE 19 (5 PKT)
Wykaż, że liczba $a=5^{26}+5^{24}$ jest podzielna przez 130.

ZADANIE 20 (5 PKT)
Niech $A=\{x : x\in\mathbb{N} \wedge x\leqslant\sqrt{230}\}$ i $B=\{x : x<25 \wedge x=5n, n\in\mathbb{N}\}$. Wyznacz zbiory $A\cap B$ oraz $B\setminus A$.

ZADANIE 21 (5 PKT)
Wykaż, że $5^{12}-1$ jest liczbą podzielną przez 31.

ZADANIE 22 (5 PKT)
Wykaż, że jeżeli n jest liczbą nieparzystą to liczba

$$(n-1)(n+1)(n+3)$$

jest liczbą podzielną przez 48.

ZADANIE 23 (5 PKT)
Wykaż, że liczba 4^9+3^9 jest podzielna przez 91.

ZADANIE 24 (5 PKT)
Wykaż, że liczba 2^9+5^9 jest podzielna przez 133.

ZADANIE 25 (5 PKT)
Wykaż, że dla dowolnej liczby całkowitej k różnica iloczynu tej liczby i liczby od niej o 3 większej oraz iloczynu dwóch kolejnych liczb całkowitych większych od k jest równa -2.

ZADANIE 26 (5 PKT)
Uzasadnij, że dla każdej liczby całkowitej k liczba $k^6-2k^4+k^2$ jest podzielna przez 36.

ZADANIE 27 (5 PKT)
Wykaż, że jeżeli p jest liczbą pierwszą większą od 3 to p^2 przy dzieleniu przez 24 daje resztę 1.

ZADANIE 28 (5 PKT)
Wykaż, że liczba $2^{13}+2^{15}+2^{17}$ jest podzielna przez 21.

ZADANIE 29 (5 PKT)
Wykaż, że kwadrat liczby całkowitej dającej z dzielenia przez 3 resztę 2, przy dzieleniu przez 3 daje resztę 1.

ZADANIE 30 (5 PKT)
Uzasadnij, że jeżeli n jest liczbą naturalną to liczba 58^n-1 dzieli się przez 19.

ZADANIE 31 (5 PKT)
Wykaż, że jeżeli przy dzieleniu przez 7 jedna liczba daję resztę 3, a druga resztę 4, to iloczyn tych liczb daje przy dzieleniu przez 7 resztę 5.

ZADANIE 32 (5 PKT)
Pokazać, że dla każdej liczby całkowitej n liczba n^5-n jest podzielna przez 30.

ZADANIE 33 (5 PKT)
Wykaż, że reszta z dzielenia sumy kwadratów trzech kolejnych liczb naturalnych przez 3 jest równa 2.

ZADANIE 34 (5 PKT)
Uzasadnij, że suma kwadratów dwóch kolejnych nieparzystych liczb całkowitych nie może być kwadratem liczby całkowitej.

ZADANIE 35 (5 PKT)
Udowodnij, że jeśli k i n są liczbami naturalnymi oraz $1 \leqslant k \leqslant n$, to $k(n-k+1) \geqslant n$.

ZADANIE 36 (5 PKT)
Udowodnij, że dla każdej liczby naturalnej n, liczba $\frac{1}{9}(100^{n+1} + 4 \cdot 10^{n+1} + 4)$ jest kwadratem liczby naturalnej.

ZADANIE 37 (5 PKT)
Uzasadnij, że jeżeli n jest liczbą całkowitą to liczba $(n^2 - \sqrt{2}n + 1)(n^2 + \sqrt{2}n + 1)$ też jest liczbą całkowitą.