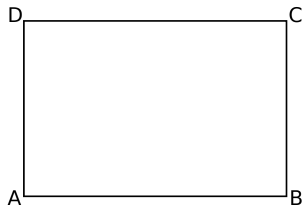
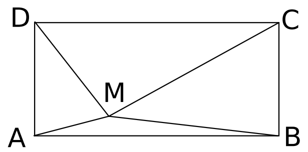
ZADANIE 1

Uzasadnij, że punkty przecięcia dwusiecznych kątów wewnętrznych prostokąta $ABCD$ są wierzchołkami kwadratu.



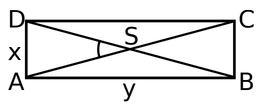
ZADANIE 2

Punkt M leży wewnątrz prostokąta $ABCD$ (zob. rysunek). Udowodnij, że $AM^2 + CM^2 = BM^2 + DM^2$.



ZADANIE 3

Dany jest prostokąt $ABCD$, którego boki mają długości x i y. Punkt S jest punktem przecięcia się przekątnych prostokąta.

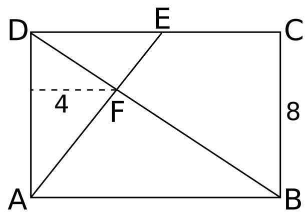


a) Wykaż, że pole trójkąta ASD jest cztery razy mniejsze od pola prostokąta $ABCD$.

b) Wiedząc dodatkowo, że $P_{\Delta ASD} = 15 \text{ cm}^2$ i $|\measuredangle ASD| = 30^\circ$, oblicz pole kwadratu, którego bok ma długość $(x + y)$.

ZADANIE 4

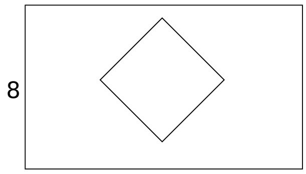
W prostokącie $ABCD$, w którym $|BC| = 8$ połączono wierzchołek A z punktem E leżącym na boku DC. Odcinek ten przeciął przekątną BD w punkcie F.



Wiedząc, że odległość punktu F od boku AD jest równa 4, oraz że $|AE| = 10$ oblicz długość boku AB prostokąta.

ZADANIE 5

W prostokącie, którego krótszy bok ma długość 8 zawarty jest kwadrat o boku równym różnicy



długości boków prostokąta, i którego przekątne są równoległe do boków prostokąta.

a) Wyraź pole pozostałe po wycięciu kwadratu z prostokąta jako funkcję dłuższego boku prostokąta. Wyznacz dziedzinę otrzymanej funkcji.

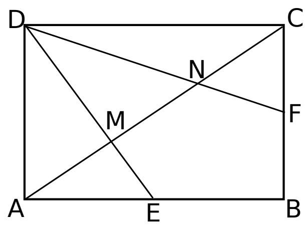
b) Wykaż, że różnica pól prostokąta i kwadratu jest zawsze większa od 64.

ZADANIE 6

W prostokącie $ABCD$ wierzchołek D połączono odcinkami ze środkami E i F boków AB i BC, zaś M i N to punkty przecięcia tych odcinków z przekątną AC.

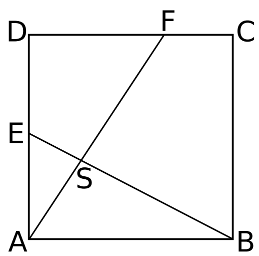
a) Uzasadnij, że odcinki AM, MN i NC są jednakowej długości.

b) Uzasadnij, że trójkąty AEM i CNF mają równe pola.



ZADANIE 7

Na bokach AD i CD kwadratu $ABCD$ o boku długości 1 wybrano punkty E i F w ten sposób, że $AE = \frac{1}{k}$ i $DF = \frac{1}{m}$, dla $k, m \in (1, +\infty)$. Niech S będzie punktem przecięcia odcinków AF i BE



a) Wykaż, że jeżeli trójkąt ABS jest prostokątny to $k = m$.

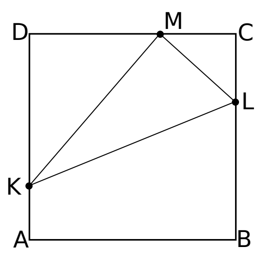
b) Oblicz cosinus kąta ASB jeżeli $k = 3$ i $m = 2$.

ZADANIE 8

Na bokach AD, DC i CB kwadratu $ABCD$ wybrano punkty K, M i L ten sposób, że $|DK| = 2|KA|$, $|DM| = 2|MC|$, oraz $|BL| = 2|LC|$.

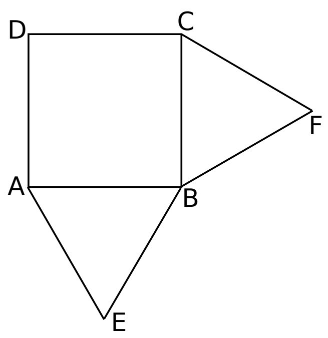
a) Uzasadnij, że trójkąt KLM jest prostokątny.

b) Oblicz tangensy kątów ostrych trójkąta KLM.



ZADANIE 9

Na zewnątrz kwadratu $ABCD$ na bokach AB i BC zbudowano trójkąty równoboczne AEB i BFC. Uzasadnij, że trójkąt DEF jest równoboczny.

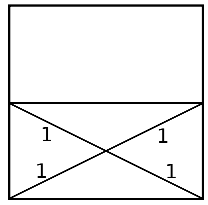


ZADANIE 10

Koło i kwadrat mają równe obwody. Wykaż, że pierwsza z tych figur ma większe pole.

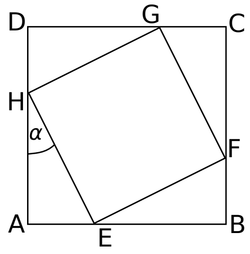
ZADANIE 11

W kwadracie połączono odcinkiem środki przeciwległych boków. Wiedząc, że przekątne tak utworzonych prostokątów dzielą się na odcinki długości 1, oblicz pole wyjściowego kwadratu.



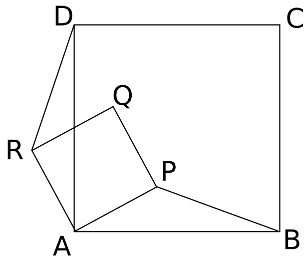
ZADANIE 12

W kwadrat $ABCD$ o boku długości 17 wpisano kwadrat $EFGH$, jak pokazano na rysunku. Wiedząc, że przekątna kwadratu $EFGH$ ma długość $13\sqrt{2}$ oblicz tangens kąta α zaznaczonego na rysunku.



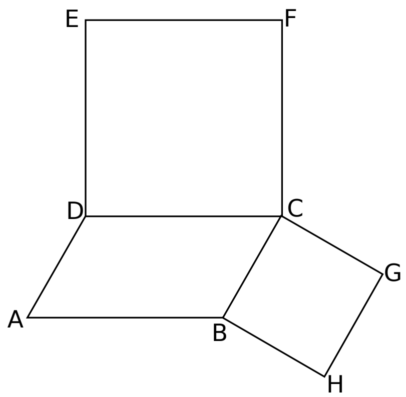
ZADANIE 13

Czworokąty $ABCD$ i $APQR$ są kwadratami. Udowodnij, że $|BP| = |DR|$.



ZADANIE 14

Na bokach BC i CD równoległoboku $ABCD$ zbudowano kwadraty $CDEF$ i $BCGH$ (zobacz rysunek).



Udowodnij, że $|AC| = |FG|$.

ZADANIE 15

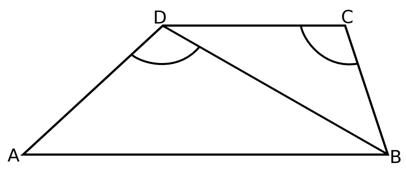
Prosta przechodząca przez wierzchołek A równoległoboku $ABCD$ przecina jego przekątną BD w punkcie E i bok BC w punkcie F, a prostą DC w punkcie G. Udowodnij, że

$$|EA|^2 = |EF| \cdot |EG|.$$

ZADANIE 16
Punkt E leży na ramieniu BC trapezu $ABCD$, w którym $AB \parallel CD$. Udowodnij, że $\measuredangle AED = \measuredangle BAE + \measuredangle CDE$.

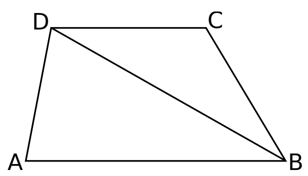
ZADANIE 17
Punkt S jest środkiem okręgu wpisanego w trapez $ABCD$ ($AB \parallel CD$). Wykaż, że trójkąt SBC jest prostokątny.

ZADANIE 18
W trapezie $ABCD$ długość podstawy CD jest równa 18, a długości ramion trapezu AD i BC są odpowiednio równe 25 i 15. Kąty ADB i DCB, zaznaczone na rysunku, mają równe miary. Oblicz obwód tego trapezu.



ZADANIE 19
Dany jest trapez $ABCD$ o podstawach AB i CD. Przekątne tego trapezu przecinają się w punkcie S. Wykaż, że $|SA| \cdot |SD| = |SB| \cdot |SC|$.

ZADANIE 20
W trapezie $ABCD$, w którym $AB \parallel DC$ oraz $|AB| > |DC|$, przekątna DB zawiera się w dwusiecznej kąta ABC. Wykaż, że $|DC| = |BC|$.



ZADANIE 21
Przekątna trapezu równoramiennego tworzy z dłuższą podstawą kąt 2α, a z ramieniem kąt α. Wykaż, że stosunek pól trójkątów, na które został podzielony trapez tą przekątną, jest równy $\frac{\sin 5\alpha}{\sin \alpha}$.

ZADANIE 22
Dwa przeciwległe boki czworokąta wpisanego w okrąg mają równe długości. Wykaż, że czworokąt ten jest trapezem.

ZADANIE 23
Podstawy trapezu równoramiennego mają długości a i b, gdzie $a > b$. Z wierzchołka kąta rozwartego trapezu poprowadzono wysokość. Uzasadnij, że wysokość ta dzieli dłuższą podstawę na odcinki o długościach $\frac{a-b}{2}$ i $\frac{a+b}{2}$.

ZADANIE 24

Wykaż, że istnieją dokładnie dwie liczby naturalne n takie, że trójkąt o bokach $n, n+2, n+3$ jest rozwartokątny.

ZADANIE 25

Udowodnij, że jeżeli w trójkącie dwa kąty nie są równe, to naprzeciw większego z nich leży dłuższy bok.

ZADANIE 26

Wykaż, że pole trójkąta o bokach a, b, c i promieniu R okręgu opisanego na nim jest równe $\frac{abc}{4R}$.

ZADANIE 27

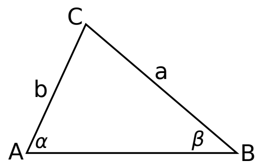
Odcinki AK i BL są wysokościami trójkąta ostrokątnego ABC, a punkt S jest punktem ich przecięcia. Uzasadnij, że:

a) na czworokącie $ABKL$ można opisać okrąg;

b) okręgi opisane na trójkątach ABC i ABS mają promienie równej długości.

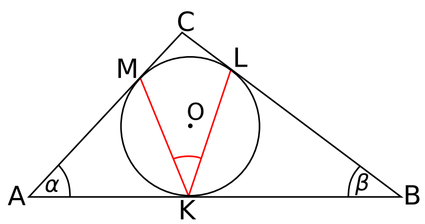
ZADANIE 28

Wykaż, że jeżeli w trójkącie $\frac{a}{b} = \sqrt{2}$ to $\cos^2\alpha = 2\cos^2\beta - 1$.



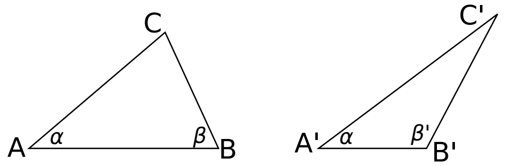
ZADANIE 29

W trójkąt ABC, w którym $|\measuredangle BAC| = \alpha$ oraz $|\measuredangle ABC| = \beta$, wpisano okrąg. Punkty K, L, M są punktami styczności okręgu odpowiednio z bokami AB, BC i AC. Wykaż, że $|\measuredangle MKL| = \frac{\alpha+\beta}{2}$.



ZADANIE 30

Dane są dwa trójkąty: ABC oraz $A'B'C'$ takie, że $\alpha = \alpha'$ oraz $\beta + \beta' = 180$.



Wykaż, że:

$$\frac{|AC|}{|BC|} = \frac{|A'C'|}{|B'C'|}.$$

ZADANIE 31

Trójkąty ABC i DEF wpisano w ten sam okrąg. Udowodnij, że równość obwodów tych trójkątów jest równoważna równości sum sinusów ich kątów wewnętrznych.

ZADANIE 32

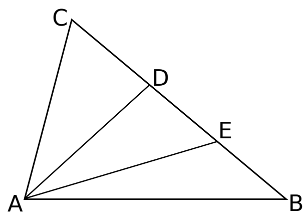
W trójkącie ABC miara kąta ACB jest dwa razy większa od miary kąta CAB. Dwusieczna kąta ACB dzieli trójkąt ABC na dwa trójkąty. Uzasadnij, że jeden z otrzymanych trójkątów jest podobny do trójkąta ABC.

ZADANIE 33

Uzasadnij wzór na pole trójkąta $P = \frac{h^2\sin(\alpha+\beta)}{2\sin\alpha\sin\beta}$, gdzie α i β są miarami kątów trójkąta przyległych do boku, na który opuszczono wysokość h.

ZADANIE 34

Punkty D i E dzielą bok BC trójkąta ABC na trzy równe części (zobacz rysunek). Wykaż, że pole trójkąta ADE jest trzy razy mniejsze od pola trójkąta ABC.



ZADANIE 35

Wykaż, że suma odległości dowolnego punktu wewnętrznego trójkąta od jego wierzchołków jest większa od połowy obwodu trójkąta.

ZADANIE 36

W trójkącie ABC punkt S jest środkiem okręgu wpisanego, a punkty KLM są punktami styczności okręgu wpisanego w trójkąt z bokami BC, CA i AB odpowiednio.

a) Uzasadnij, że na czworokącie $AMSL$ można opisać okrąg.

b) Wiedząc, że $|\measuredangle CAB| = 38^\circ$ oraz $|\measuredangle ABC| = 58^\circ$ oblicz miary kątów trójkąta KLM.

ZADANIE 37

W trójkącie ABC, o bokach długości a, b, c, połączono odcinkiem wierzchołek A z punktem E na boku BC takim, że $BE = p$ i $EC = q$. Uzasadnij, że jeżeli $d = AE$, to $a(d^2 + pq) = b^2p + c^2q$ (twierdzenie Stewarta).

ZADANIE 38

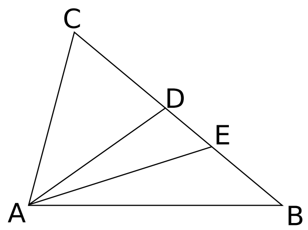
Wykaż, że jeśli α i β są kątami trójkąta oraz $\frac{\sin\alpha}{\cos\beta} = \frac{\sin\beta}{\cos\alpha}$ to trójkąt ten jest równoramienny lub prostokątny.

ZADANIE 39

Punkt S jest punktem przecięcia się wysokości trójkąta ostrokątnego ABC. Wykaż, że jeżeli $|CS| = |AB|$ to $|\measuredangle ACB| = 45^\circ$.

ZADANIE 40

Na boku BC trójkąta ABC wybrano punkt D tak, by $|\measuredangle CAD| = |\measuredangle ABC|$. Odcinek AE jest dwusieczną kąta DAB. Udowodnij, że $|CE| = |AC|$.



Rozwiązania zadań znajdziesz na stronie
HTTP://WWW.ZADANIA.INFO/2233_8331R