ZADANIE 1
Dla jakich wartości parametru m równanie $x^2+y^2-2mx+2m-1=0$ opisuje okrąg?

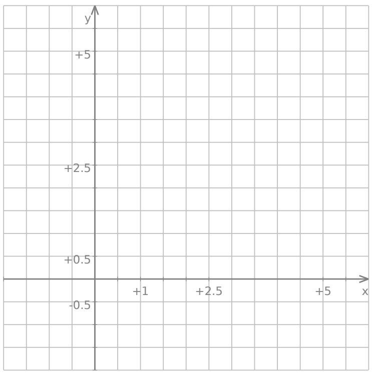
a) Podaj wspórzędne środka i długość promienia okręgu.

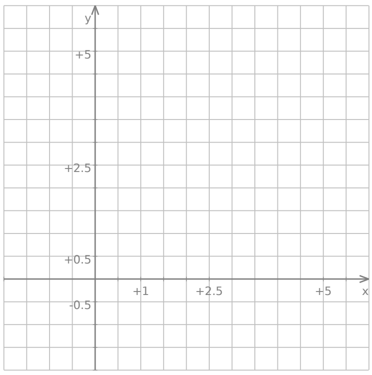
b) Dla jakich wartości parametru m okrąg ten jest styczny do prostej o równaniu $x=4$?

ZADANIE 2
Znajdź równanie okręgu stycznego do prostej $k: x+y+13=0$ i do prostej $m: 7x-y-5=0$ w punkcie $A(1,2)$.

ZADANIE 3
Znajdź zbiór środków wszystkich okręgów stycznych wewnętrznie do okręgu o równaniu $x^2+y^2=4$ i stycznych do prostej o równaniu $y=0$.

ZADANIE 4
Wierzchołkami kwadratu $ABCD$ są punkty o współrzędnych $A(0,0)$, $B(4,0)$, $C(4,4)$ i $D(0,4)$. Dla każdej liczby rzczywistej $m\in(-2,4)$ rozważamy trójkąt o wierzchołkach $P_m(m,0)$, $S_m(m+2,0)$ i $R_m(m,4)$. Wyznacz wszystkie wartości prametru m, dla których pole figury, która jest częścią wspólną kwadratu $ABCD$ i trójkąta $P_mS_mR_m$ wynosi 2.





ZADANIE 5
W okrąg o równaniu $x^2+y^2-12x-8y+32=0$ wpisano trójkąt równoboczny ABC w którym $A=(2;6)$. Oblicz współrzędne pozostałych wierzchołków trójkąta.

ZADANIE 6
Końcami odcinka są punkty o współrzędnych $A=(-1,-2)$ oraz $B=(3,6)$. Odcinek CD jest obrazem odcinka AB zarówno w jednokładności o dodatniej skali i środku $S_1=(-5,2)$, jak i w jednokładności o ujemnej skali i środku $S_2=(3,2)$. Oblicz współrzędne końców odcinka CD oraz skalę jednokładności o środku S_2.

ZADANIE 7
Punkt $A(-1;-2)$ jest wierzchołkiem rombu, którego jeden z boków zawiera się w prostej k o równaniu $x-2y-3=0$. Środkiem symetrii tego rombu jest punkt $S(2;2)$. Oblicz współrzędne pozostałych wierzchołków rombu i oblicz jego pole.

ZADANIE 8

Dany jest ciąg punktów (P_n) na płaszczyźnie, których współrzędne dane są wzorem $P_n = (n, \frac{2}{3}n^2 - 3n + 3)$, gdzie $n \geqslant 1$. Wyznacz tę wartość n, dla której odległość punktu P_n od prostej $y = 8x - 50$ jest najmniejsza z możliwych.

ZADANIE 9

Wyznacz figurę, która jest zbiorem środków cięciw paraboli $y = x^2 - 1$ przechodzących przez początek układu współrzędnych.

ZADANIE 10

Punkty $A = (4, 10 - \sqrt{21})$ i $B = (8, 10 + \sqrt{21})$ są wierzchołkami trójkąta prostokątnego ABC, o kącie prostym przy wierzchołku C. Oblicz współrzędne wierzchołka C tego trójkąta, wiedząc, że leży on na paraboli o równaniu $y = x^2 - 12x + 33$.

ZADANIE 11

Wierzchołki trójkąta równobocznego ABC są punktami paraboli $y = -x^2 + 6x$. Punkt C jest jej wierzchołkiem, a bok AB jest równoległy do osi Ox. Sporządź rysunek w układzie współrzędnych i wyznacz współrzędne wierzchołków tego trójkąta.

ZADANIE 12

Jeden z boków kwadratu $ABCD$ jest zawarty w prostej o równaniu $2x - y - 2 = 0$. Wierzchołek A ma współrzędne $(1, 5)$.

a) Znajdź współrzędne pozostałych wierzchołków.

b) Oblicz pole kwadratu $ABCD$.

ZADANIE 13

Wierzchołek C trójkąta ABC leży na okręgu o równaniu $x^2 + 12x + y^2 - 2y + 21 = 0$, a pozostałe wierzchołki mają współrzędne $A = (-4, 1)$ i $B = (2, 1)$. Oblicz wartość wyrażenia

$$\frac{\sin \angle ABC}{\sin \angle BAC}.$$

ZADANIE 14

W równoramiennym trójkącie prostokątnym punkt $A = (3; 1)$ jest wierzchołkiem kąta ostrego. Przeciwległa do niego przyprostokątna zawiera się w prostej o równaniu $x - y + 1 = 0$. Napisz równania prostych zawierających pozostałe boki trójkąta.

ZADANIE 15

Dla jakich wartości parametru m proste $x = my + 1$ oraz $y = mx - 1$ przecinają się w jednym punkcie, który leży poniżej prostej $x = 1 - 4y$?

ZADANIE 16

Prosta $y = t$ przecina proste $y = 2x - 1$ i $y = 0,5x + 2$ odpowiednio w punktach A i B.

a) Wyraź długość odcinka AB jako funkcję zmiennej t.

b) Wyznacz takie punkty A i B, aby długość odcinka AB była równa 3.

ZADANIE 17

Na paraboli o równaniu $y = x^2 + 6x + 5$ znajdź współrzędne punktu A, którego odległość od prostej o równaniu $y = 2x - 13$ jest najmniejsza.

ZADANIE 18

Dany jest czworokąt $ABCD$, gdzie $A = (-1, 4), B = (-3, -1), C = (2, -2), D = (1, 2)$.

a) Oblicz pole czworokąta $ABCD$.

b) Oblicz wartość wyrażenia $\left(\frac{\sin\angle DBC}{\sin\angle BCD}\right)^2 + \left(\frac{\sin\angle DBA}{\sin\angle BAD}\right)^2$.

ZADANIE 19

Przez początek układu współrzędnych poprowadzono prostą przecinającą okrąg $x^2 + y^2 - 8y + 12 = 0$ w dwóch punktach A i B. Uzasadnij, że liczba $|OA| \cdot |OB|$ nie zależy od wyboru prostej i oblicz wartość tego iloczynu.

ZADANIE 20

Podstawa trójkąta równoramiennego zawiera się w prostej $y = -x - 5$, a jedno z jego ramion w prostej $y = 3x - 5$. Wyznacz równanie drugiego ramienia tego trójkąta, jeżeli jednym z jego wierzchołków jest punkt o współrzędnych $(2, 1)$.

ZADANIE 21

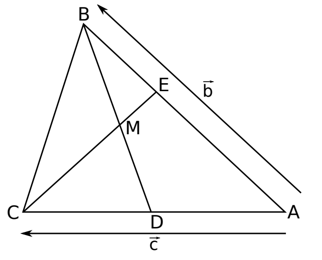
Znajdź taki punkt P leżący na prostej l o równaniu $x = 0$, z którego odcinek AB, gdzie $A = (4, 0)$, $B = (28, 0)$, widać pod możliwie największym kątem. Wyznacz ten kąt.

ZADANIE 22

Mając dane współrzędne punktu $C = (-5, 0)$ kwadratu $ABCD$ oraz współrzędne punktu przecięcia się przekątnych $S = (1, 2)$, wyznacz współrzędne pozostałych wierzchołków kwadratu $ABCD$.

ZADANIE 23

Na bokach AB i AC trójkąta ABC wybrano punkty E i D w ten sposób, że $|AE| = 2|EB|$ i $|AD| = |DC|$. Punkt M jest punktem wspólnym odcinków CE i BD.



a) Przedstaw każdy z wektorów $\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BD}$ oraz $\overrightarrow{CE}$ w postaci $p \cdot \vec{b} + q \cdot \vec{c}$, gdzie $\vec{b} = \overrightarrow{AB}, \vec{c} = \overrightarrow{AC}$ oraz $p, q \in \mathbb{R}$.

b) Korzystając z równości $\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CM} = \overrightarrow{BM}$ oblicz w jakim stosunku punkt M dzieli odcinki BD i CE.

ZADANIE 24

Podstawa AB trójkąta równoramiennego ABC zawarta jest w prostej $x + y + 1 = 0$. Ramię BC zawiera się w prostej $2x - y - 1 = 0$. Wyznacz równanie prostej k, zawierającej ramię AC, wiedząc że punkt $P = (-4; 0)$ należy do prostej k.

ZADANIE 25

Za pomocą rachunku wektorowego pokazać, że środki boków dowolnego czworokąta tworzą wierzchołki równoległoboku.

ZADANIE 26

Wyznacz równanie zbioru środków wszystkich okręgów stycznych zewnętrznie do okręgu $x^2 + (y - 2)^2 = 1$ i stycznych do prostej $y = -2$.

ZADANIE 27

Na prostej $l : x + y - 6 = 0$ wyznacz taki punkt C, aby długość łamanej ACB, gdzie $A(1, 3)$, $B(2, 2)$, była najmniejsza. Uzasadnij swoje rozumowanie.

ZADANIE 28

Punkty przecięcia paraboli $y = x^2 - 2x - 8$ z prostą $2x + y - 1 = 0$ są końcami przekątnej rombu, którego pole wynosi 30. Oblicz współrzędne wierzchołków tego rombu oraz długość jego boku.

ZADANIE 29

Wykaż, że cosinus kąta przecięcia się wykresów funkcji $f(x) = \frac{4}{3}x + 1$ i $g(x) = -x\sqrt{2} + 9$ jest równy $\frac{4\sqrt{6} - 3\sqrt{3}}{15}$.

ZADANIE 30

Wierzchołek C trójkąta ostrokątnego ABC ma współrzędne $(2; 7)$. Prosta o równaniu $2x + y - 1 = 0$ jest symetralną wysokości CD, a prosta o równaniu $x + 3y - 8 = 0$ zawiera środkową trójkąta poprowadzoną z wierzchołka A. Oblicz współrzędne punktów A, B, D.

ZADANIE 31

Napisz równanie okręgu stycznego do osi y w punkcie $A = (0, 2)$ i przechodzącego przez punkt $P = (4, 6)$. Wyznacz na okręgu takie punkty B i C, aby trójkąt ABC był równoboczny.

ZADANIE 32
Znajdź zbiór środków wszystkich cięciw okręgu $x^2 + y^2 + 4y + 3 = 0$, wyznaczonych przez proste przechodzące przez punkt $P = (0,1)$.

ZADANIE 33
Znajdź równania prostych stycznych do dwóch okręgów: $(x-3)^2 + y^2 = 9$ i $(x+5)^2 + y^2 = 25$.

ZADANIE 34
Dane są punkty $A = (2,3)$ i $B = (5,4)$. Na prostej o równaniu $y = 5$ wyznacz punkt C tak, aby łamana ACB miała jak najmniejszą długość. Odpowiedź uzasadnij.

ZADANIE 35
Rozważmy cięciwy AB paraboli $y = x^2 + 4x + 3$ przechodzące przez punkt $(1,0)$, przy czym przez cięciwę AB rozumiemy prostą przecinającą tę parabolę w dwóch punktach A i B. Wyznacz współrzędne punktów A i B, dla których suma współrzędnych środka odcinka AB cięciwy AB jest równa -2.

ZADANIE 36
Dany jest okrąg o równaniu $x^2 + y^2 - 8x + 12 = 0$.

a) Wyznacz równania stycznych do okręgu przechodzących przez początek układu współrzędnych.

b) Oblicz pole figury ograniczonej stycznymi i łukiem okręgu wyznaczonym przez punkty styczności.

ZADANIE 37
Dany jest okrąg o równaniu $x^2 + y^2 - 2x + 6y + 5 = 0$.

a) Napisz równania stycznych do danego okręgu, prostopadłych do prostej o równaniu $x - 2y = 0$.

b) Oblicz pole trójkąta ABS, gdzie A i B są punktami przecięcia się stycznych z prostą o równaniu $3x - y + 4 = 0$, zaś S jest środkiem danego okręgu.

ZADANIE 38
Dane są punkty $A = (-1,3)$ i $B = (3,6)$. Funkcja f przyporządkowuje dowolnemu punktowi należącemu do odcinka AB jego odległość od punktu $P = (1,1)$. Wyznacz zbiór wartości tej funkcji i jej wartość najmniejszą.

ZADANIE 39
Zbadaj dla jakich wartości parametru m punkt przecięcia się prostych $mx + (2m-1)y - 3m = 0$ i $x + my - m = 0$ należy do prostokąta o wierzchołkach $A = (-1,-2)$, $B = (1,-2)$, $C = (1,2)$, $D = (-1,2)$?

ZADANIE 40
Wyznacz równanie prostej przechodzącej przez punkt $A(2,1)$ i tworzącej z prostą $2x - y + 1 = 0$ kąt o mierze $\frac{\pi}{3}$.

Rozwiązania zadań znajdziesz na stronie
HTTP://WWW.ZADANIA.INFO/4673_8569R