ZADANIE 1

Długości boków trójkąta tworzą trzy kolejne wyrazy ciągu arytmetycznego o różnicy 1. Oblicz długości boków tego trójkąta, jeśli jego pole wynosi $0,75\sqrt{15}$.

ZADANIE 2

Pierwszy, trzeci i jedenasty wyraz ciągu arytmetycznego o różnicy $r \neq 0$ są kolejnymi wyrazami ciągu geometrycznego o ilorazie q. Dla jakich wartości parametru m funkcja $f(x) = x^2 + mx + q$ osiąga minimum większe od -196?

ZADANIE 3

Wyznacz liczbę x tak, aby liczby dodatnie $\log_8(x-1), 3\log_8(x-1), 6$ tworzyły ciąg geometryczny (w podanej kolejności).

ZADANIE 4

Liczba przekątnych wielokąta wypukłego, w którym jest n boków i $n \geqslant 3$ wyraża się wzorem $P_n = \frac{n(n-3)}{2}$.

a) Oblicz liczbę przekątnych w dwudziestokącie wypukłym.

b) Oblicz, ile boków ma wielokąt wypukły, w którym liczba przekątnych jest pięć razy większa od liczby boków.

c) Sprawdź, czy jest prawdziwe następujące stwierdzenie: *Każdy wielokąt wypukły o parzystej liczbie boków ma parzystą liczbę przekątnych.* Odpowiedź uzasadnij.

d) Uzasadnij, że jeżeli liczba boków wielokąta wypukłego jest nieparzysta, to liczba jego przekątnych jest wielokrotnością liczby jego boków.

ZADANIE 5

W trójkąt równoboczny o boku długości a wpisano koło, w które następnie wpisano trójkąt równoboczny, a w ten trójkąt znów koło i tak dalej. Oblicz sumę pól wszystkich wpisanych kół.

ZADANIE 6

Wyznacz wszystkie ciągi geometryczne o wyrazach różnych od zera, w których każdy wyraz, rozpoczynając od wyrazu trzeciego, jest równy średniej arytmetycznej dwóch poprzednich wyrazów.

ZADANIE 7

Jednym z pierwiastków trójmianu kwadratowego $y = ax^2 + bx + c$ jest -0,2. Liczby a, b, c tworzą w podanej kolejności ciąg arytmetyczny, a ich suma wynosi 24. Oblicz drugi pierwiastek tego trójmianu.

ZADANIE 8

Jedno z rozwiązań równania $acx^2 + (a-bc)x - b = 0$ z niewiadomą x jest równe 4. Liczby a, b i c (w podanej kolejności) tworzą ciąg arytmetyczny, w którym pierwszy wyraz jest o 6 większy od trzeciego. Znajdź drugie rozwiązanie tego równania.

ZADANIE 9
Wyznacz pierwsze trzy wyrazy ciągu geometrycznego wiedząc, że są one dodatnie, ich suma jest równa 21 oraz suma ich odwrotności jest równa $\frac{7}{12}$.

ZADANIE 10
W ciągu arytmetycznym (a_n) dane są wyrazy: $a_3 = 4,\ a_6 = 19$. Wyznacz wszystkie wartości n, dla których wyrazy ciągu (a_n) są mniejsze od 200.

ZADANIE 11
Wykaż, że jeżeli liczby a^2, b^2 i c^2 tworzą ciąg arytmetyczny, który nie jest stały, to liczby $\frac{1}{b+c}, \frac{1}{a+c}$ i $\frac{1}{a+b}$ również tworzą ciąg arytmetyczny.

ZADANIE 12
Liczby x_1 i x_2 są różnymi miejscami zerowymi funkcji kwadratowej $f(x) = x^2 - (a+1)x + a^2$. Dla jakich $a \in \mathbb{R}$ ciąg $(x_1 + x_2; \sqrt{2}; x_1x_2)$ jest geometryczny?

ZADANIE 13
Różnica między drugim wyrazem ciągu geometrycznego a pierwszym wyrazem tego ciągu wynosi -6, a różnica między czwartym a pierwszym wyrazem tego ciągu jest równa -18. Oblicz trzeci wyraz tego ciągu.

ZADANIE 14
Trzy liczby, których suma jest równa 93, tworzą ciąg geometryczny. Te same liczby stanowią pierwszy, drugi oraz siódmy wyraz ciągu arytmetycznego. Wyznacz te liczby.

ZADANIE 15
Różnica między pierwszym a siódmym wyrazem ciągu geometrycznego jest równa 63, a różnica między wyrazem pierwszym a czwartym jest równa 72. Oblicz sumę pierwszych 7 wyrazów tego ciągu.

ZADANIE 16
Sinusy kątów ostrych trójkąta prostokątnego oraz liczba 1 tworzą ze sobą ciąg geometryczny. Oblicz sinus najmniejszego kąta tego trójkąta.

ZADANIE 17
Cztery liczby tworzą ciąg geometryczny. Jeżeli od pierwszej z nich odejmiemy 2, od drugiej 3, od trzeciej 9, a od czwartej 25, to otrzymane różnice utworzą ciąg arytmetyczny. Znajdź te liczby.

ZADANIE 18
Dla jakich wartości x liczby $1 + \log_2 3,\ \log_x 36,\ \frac{3}{4}\log_8 6$ są kolejnymi wyrazami ciągu geometrycznego.

ZADANIE 19
Na płaszczyźnie z prostokątnym układem współrzędnych zilustruj zbiór wszystkich punktów płaszczyzny o współrzędnych (x, y), dla których ciąg: $(xy - 2, xy + x, x)$ jest rosnącym ciągiem arytmetycznym.

ZADANIE 20
Trzy liczby są kolejnymi wyrazami ciągu arytmetycznego. Ich suma wynosi 18. Jeśli największą z tych liczb zwiększymy o 8, a pozostałych nie zmienimy, to uzyskamy trzy kolejne wyrazy ciągu geometrycznego. Wyznacz te liczby.

ZADANIE 21
Trzy liczby tworzą ciąg geometryczny. Jeżeli drugą z nich zwiększymy o 8, to otrzymamy ciąg arytmetyczny. Jeżeli trzeci wyraz otrzymanego ciągu arytmetycznego zwiększymy o 64 to znów otrzymamy ciąg geometryczny. Wyznacz te liczby.

ZADANIE 22
Pierwszy wyraz niemonotonicznego ciągu geometrycznego (a_n) jest równy 48 i jest o 36 większy od wyrazu trzeciego.

a) Oblicz iloraz ciągu (a_n).

b) Oblicz ósmy wyraz ciągu (a_n).

c) Suma kilku początkowych wyrazów ciągu (a_n) jest równa $32\frac{1}{16}$. Oblicz, ile wyrazów zsumowano.

ZADANIE 23
Długości boków prostokąta i długość jego przekątnej tworzą ciąg arytmetyczny. Oblicz długości jego boków, jeśli obwód prostokąta jest równy 14.

ZADANIE 24
Wykaż, że jeżeli ciąg (a_n) jest ciągiem geometrycznym o wyrazach dodatnich, to ciąg o wyrazie ogólnym $b_n = \log_p a_n$, dla $p > 0$ i $p \neq 1$ jest ciągiem arytmetycznym.

ZADANIE 25
Dane są dwa ciągi rosnące: arytmetyczny (a_n) i geometryczny (b_n). Pierwsze wyrazy obu ciągów są równe 2, trzecie ich wyrazy są takie same, a jedenasty wyraz ciągu arytmetycznego jest równy piątemu wyrazowi ciągu geometrycznego. Wyznacz te ciągi zapisując wzory na wyrazy ogólne.

ZADANIE 26
Ciąg (a_n) określony jest rekurencyjnie: $a_1 = 1$, $a_{n+1} = a_n - 3n + 1$ dla $n \geqslant 1$.

a) Oblicz 4 wyraz ciągu (a_n).

b) Zbadaj monotoniczność ciągu (a_n).

ZADANIE 27

Wymiary prostopadłościanu o objętości $V = 8cm^3$ i polu powierzchni całkowitej $P = 28cm^2$ tworzą ciąg geometryczny. Wyznacz długości krawędzi bryły.

ZADANIE 28

Ile liczb trzeba wstawić między liczby 62 i 440, aby otrzymać ciąg arytmetyczny, którego suma jest równa 2008? Wyznacz różnicę tego ciągu.

ZADANIE 29

Długości boków trójkąta prostokątnego tworzą ciąg arytmetyczny. Jedna z przyprostokątnych ma długość 6. Jaką długość ma druga przyprostokątna oraz przeciwprostokątna?

ZADANIE 30

Wyznacz wszystkie wartości $k \in \mathbb{R}$, dla których pierwiastki wielomianu $W(x) = (x^2 - 8x + 12)(x - k)$ są trzema kolejnymi wyrazami rosnącego ciągu geometrycznego.

ZADANIE 31

W skończonym ciągu geometrycznym (a_n) wyraz pierwszy jest równy 3, a wyraz ostatni 768. Wiedząc, że suma wszystkich wyrazów wynosi 1533, oblicz iloraz tego ciągu.

ZADANIE 32

Trzy początkowe wyrazy malejącego ciągu arytmetycznego są pierwiastkami wielomianu $W(x) = x^3 - 3\sqrt{2}x^2 + 5x - \sqrt{2}$, a jednym z nich jest $\sqrt{2}$.

a) Znajdź pierwszy wyraz tego ciągu.

b) Oblicz sumę $a_{50} + a_{51} + a_{52} + \cdots + a_{100}$.

ZADANIE 33

Wyznacz x tak, aby ciąg $(\sqrt[3]{25} - 2, \sqrt{|x-4|}, \sqrt[3]{625} + 2\sqrt[3]{25} + 4)$ był ciągiem geometrycznym.

ZADANIE 34

Oblicz iloczyn pierwszych 99 wyrazów ciągu geometrycznego (a_n), w którym $a_1 = -\frac{1}{(\sqrt{2})^{47}}$ oraz $q = \sqrt{3-\sqrt{5}} - \sqrt{3+\sqrt{5}}$. Czy iloczyn ten jest liczbą wymierną?

ZADANIE 35

Ciąg geometryczny (a_n) jest określony wzorem $a_n = 3^{1-n}$ dla $n \geqslant 1$.

a) Oblicz iloraz tego ciągu.

b) Oblicz $\log_3 a_1 + \log_3 a_2 + \log_3 a_3 + \cdots + \log_3 a_{100}$ czyli sumę logarytmów, o podstawie 3, stu początkowych, kolejnych wyrazów tego ciągu.

ZADANIE 36

Znajdź wartość parametru p, dla której granica ciągu (a_n) określonego wzorem

$$a_n = \frac{(p^2-2p-3)n+3}{-n}$$

jest równa 4. Zbadaj monotoniczność ciągu (a_n) dla zanalezionej wartości p.